3.2) $(x,y) = (x_1 v_1 + x_2 v_2 , y_1 v_1 + y_2 v_2)$

Por prop: $(x+y,z) = (x,z)+(y,z)$

$(x,y) = (x_1 v_1 , y_1 v_1 + y_2 v_2) + (x_2 v_2 , y_1 v_1 + y_2 v_2)$

Por prop: $(\lambda x, y) = \lambda (x,y)$

$(x,y) = x_1 . (v_1 , y_1 v_1 + y_2 v_2) + x_2 . (v_2 , y_1 v_1 + y_2 v_2)$

Por prop.: $(x,y) = \overline{(y,x)}$

$(x,y) = x_1 . \overline{(y_1 v_1 + y_2 v_2 , v_1)} + x_2 . \overline{(y_1 v_1 + y_2 v_2 , v_2)}$

Por prop: $(x+y,z) = (x,z)+(y,z)$

$(x,y) = x_1 . [\overline{(y_1 v_1 , v_1) + (y_2 v_2 , v_1)}] + x_2 . [\overline{(y_1 v_1 , v_2) + (y_2 v_2 , v_2)}]$

Por prop. de complejos:

$(x,y) = x_1 . [\overline{(y_1 v_1 , v_1)} + \overline{(y_2 v_2 , v_1)}] + x_2 . [\overline{(y_1 v_1 , v_2)} + \overline{(y_2 v_2 , v_2)}]$

Por prop: $(\lambda x, y) = \lambda (x,y)$

$(x,y) = x_1 . [\overline{y_1 (v_1 , v_1)} + \overline{y_2 (v_2 , v_1)}] + x_2 . [\overline{y_1 (v_1 , v_2)} + \overline{y_2 (v_2 , v_2)}]$

Por prop. de complejos:

$(x,y) = x_1 . [\overline{y_1} . \overline{(v_1 , v_1)} + \overline{y_2} \, \overline{(v_2 , v_1)}] + x_2 . [\overline{y_1} . \overline{(v_1 , v_2)} + \overline{y_2} . \overline{(v_2 , v_2)}]$

Por prop: $(x,y) = \overline{(y,x)}$

$(x,y) = x_1 . [\overline{y_1} . (v_1 , v_1) + \overline{y_2} . (v_1 , v_2)] + x_2 . [\overline{y_1} (v_2 , v_1) + \overline{y_2} (v_2 , v_2)]$

Por distribución:

$(x,y) = x_1 \overline{y_1} (v_1 , v_1) + x_1 \overline{y_2} (v_1 , v_2) + x_2 \overline{y_1} (v_2 , v_1) + x_2 \overline{y_2} (v_2 , v_2)$

Lo que quería demostrar ✓

b) Partiendo de:

$$(x,y) = x_1 \bar{y_1} (v_1,v_1) + x_1 \bar{y_2} (v_1,v_2) + x_2 \bar{y_1} (v_2,v_1) + x_2 \bar{y_2} (v_2,v_2)$$

$$\rightarrow (x,y) = x_1 . [\bar{y_1}(v_1,v_1) + \bar{y_2}(v_1,v_2)] + x_2 . [\bar{y_1}(v_2,v_1) + \bar{y_2}(v_2,v_2)]$$

$$\rightarrow (x,y) = [x_1 \quad x_2] . \begin{bmatrix} \bar{y_1}(v_1,v_1) + \bar{y_2}(v_1,v_2) \\ \bar{y_1}(v_2,v_1) + \bar{y_2}(v_2,v_2) \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow (x,y) = [x_1 \quad x_2] . \left[\bar{y_1} . \begin{pmatrix} (v_1,v_1) \\ (v_2,v_1) \end{pmatrix} + \bar{y_2} . \begin{pmatrix} (v_1,v_2) \\ (v_2,v_2) \end{pmatrix} \right]$$

$$\rightarrow (x,y) = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} (v_1,v_1) & (v_1,v_2) \\ (v_2,v_1) & (v_2,v_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y_1} \\ \bar{y_2} \end{bmatrix}$$

lo que quería demostrar ✓

De forma análoga se llega a las otras igualdades.

c) Como $B = \{v_1, v_2\}$ y $x = x_1 v_1 + x_2 v_2$
$y = y_1 v_1 + y_2 v_2$

$$\rightarrow [x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad [y]_B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow (x,y) = [x]_B^T \, G_B \overline{[y]_B}$$

$$\rightarrow (x,y) = [x_1 \quad x_2] \, G_B \begin{bmatrix} \bar{y_1} \\ \bar{y_2} \end{bmatrix}$$

y como en b) nos quedó:

$$(x,y) = [x_1 \quad x_2] \underbrace{\begin{bmatrix} (v_1,v_1) & (v_1,v_2) \\ (v_2,v_1) & (v_2,v_2) \end{bmatrix}}_{\text{Esta es la } G_B \checkmark} \begin{bmatrix} \bar{y_1} \\ \bar{y_2} \end{bmatrix}$$

d) Como $G_B = \begin{bmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) \end{bmatrix}$ y $G_B^* = \overline{G_B^T}$

$$\overline{G_B^T} = \begin{bmatrix} \overline{(v_1, v_1)} & \overline{(v_2, v_1)} \\ \overline{(v_1, v_2)} & \overline{(v_2, v_2)} \end{bmatrix}$$ que por prop: $(x, y) = \overline{(y, x)}$

$$\rightarrow \overline{G_B^T} = \begin{bmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) \end{bmatrix} = G_B \checkmark$$

Ahora pruebo $\det(G_B) > 0$

$$\det(G_B) = (v_1, v_1).(v_2, v_2) - (v_1, v_2).(v_2, v_1) = \|v_1\|^2.\|v_2\|^2 - (v_1, v_2).(v_2, v_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{por prop } (x, y) = \overline{(y, x)} = \|v_1\|^2.\|v_2\|^2 - (v_1, v_2).\overline{(v_1, v_2)} =$$

$$= \|v_1\|^2.\|v_2\|^2 - |(v_1, v_2)|^2$$

Por desigualdad de Cauchy-Schwarz

~~[illegible]~~

$$\|v_1\|^2.\|v_2\|^2 - |(v_1, v_2)|^2 > \|v_1\|.\|v_2\|^2 - \|v_1\|^2.\|v_2\|^2 = 0 .$$ (v_1 y v_2 son LI) son base.

~~[illegible]~~

Por lo tanto $\det(G_B) > 0$ ✓